

Estructura anular solicitada por carga concentrada

Las canalizaciones generalmente empleadas en obras de agua potable, alcantarillado, etc., tienen sección transversal circular.

Debido a que en los proyectos se consulta frecuentemente un relleno de espesor adecuado, resulta rara vez necesario precaverse del efecto de posibles cargas concentradas. Sin embargo, como tal eventualidad es posible y habiéndose presentado al autor la necesidad de calcular numerosas secciones anulares solicitadas de esa manera; se ha creído que no sería ocioso dar el procedimiento seguido.

R. Saliger (Estática aplicada, página 453), estudia la forma anular de figura 1, sometida al sistema de cargas P en equilibrio, y considerándola como el arco empotrado, le aplica las conocidas ecuaciones:

$$(I) \quad X_a = \frac{\int M y ds}{\int y^2 ds} ; X_b = \frac{\int M x ds}{\int x^2 ds} ; X_c = \frac{\int M ds}{\int ds}$$

que resultan de aceptar la constancia de la sección y momento de inercia en la forma considerada y de la eliminación de los términos relativos a la temperatura, giro y desplazamiento de los apoyos y de la $\int \frac{dx}{F}$, que se anula evidentemente en las más generales

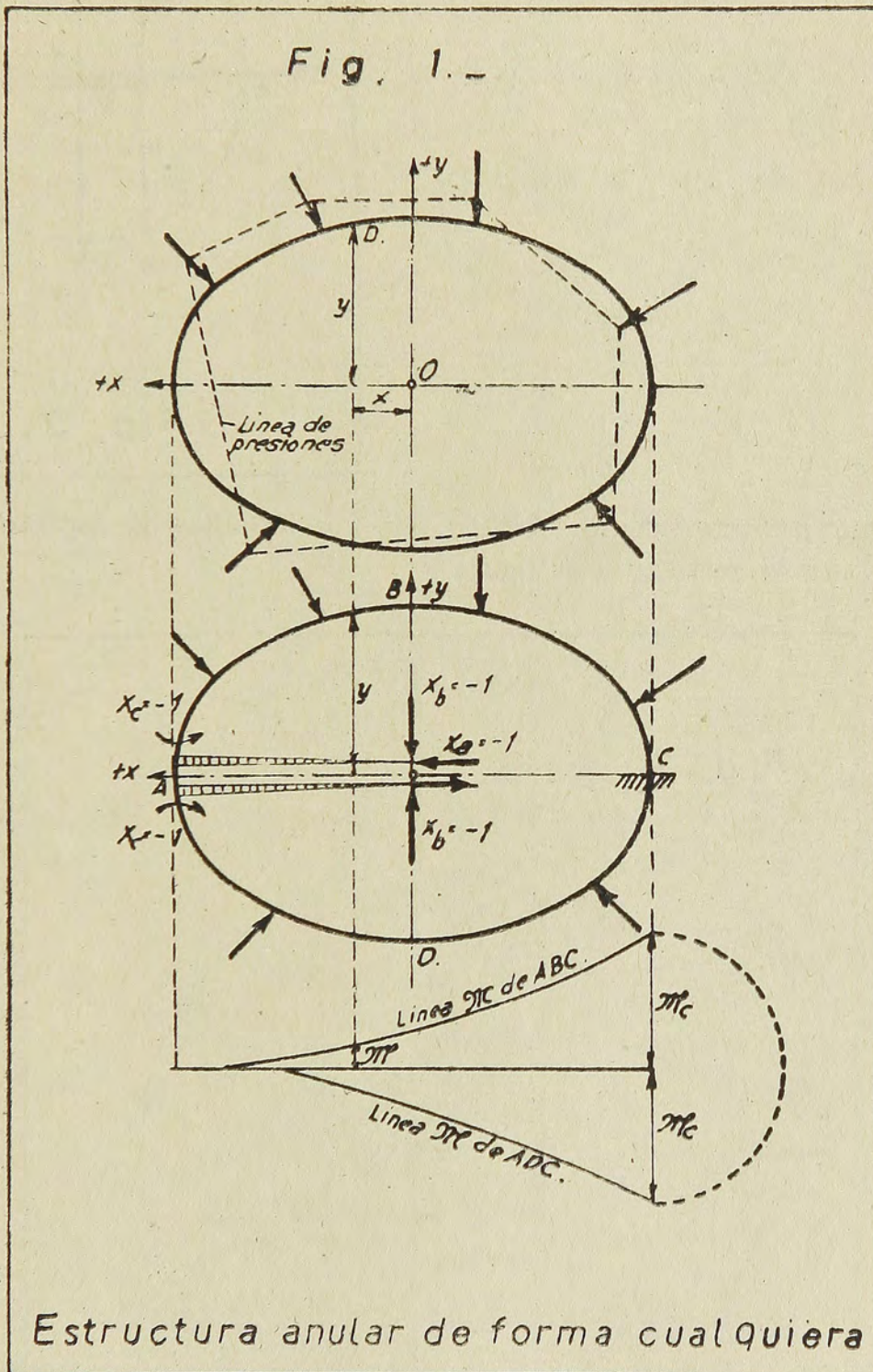
$$X_a = \frac{\frac{\int M y ds}{J} + E \omega t l - E (\Delta l + v \tau)}{\int \frac{y^2 ds}{J} + \int \frac{dx}{F}}$$

$$X_b = \frac{\int \frac{M x ds}{J} - E (\Delta v + \omega \tau)}{\int \frac{x^2 ds}{J}}$$

$$X_c = \frac{\int \frac{M ds}{J} + E \omega \Delta t \int \frac{ds}{d} - E \tau}{\int \frac{ds}{J}}$$

La superposición de los momentos y esfuerzos normales producidos por las hiperestáticas a los M y N pertinentes a la isostática fundamental (consolas empotradas en C), da lugar a los totales:

$$(II) \quad \begin{cases} M = M - X_a y - X_b x + X_c \\ N = N - X_a \cos \varphi - X_b \sin \varphi \end{cases}$$



de la estructura, previa aceptación de que los momentos que producen tracción interna y compresión externa se consideren positivos y de que los esfuerzos normales de tracción se computen así mismo con el signo +.

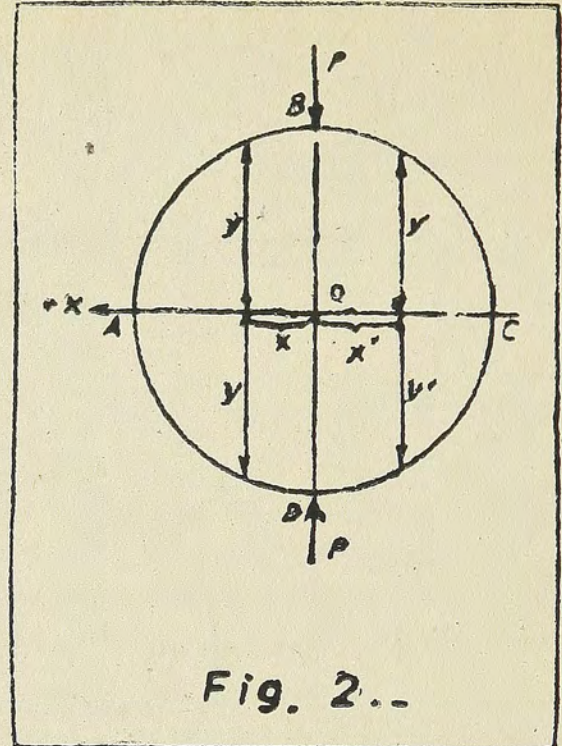
La aplicación de las fórmulas (I) y (II) conduce al autor citado a encontrar que en la estructura de figura 2 son:

$$M_A = M_C = -0,182 Pr$$

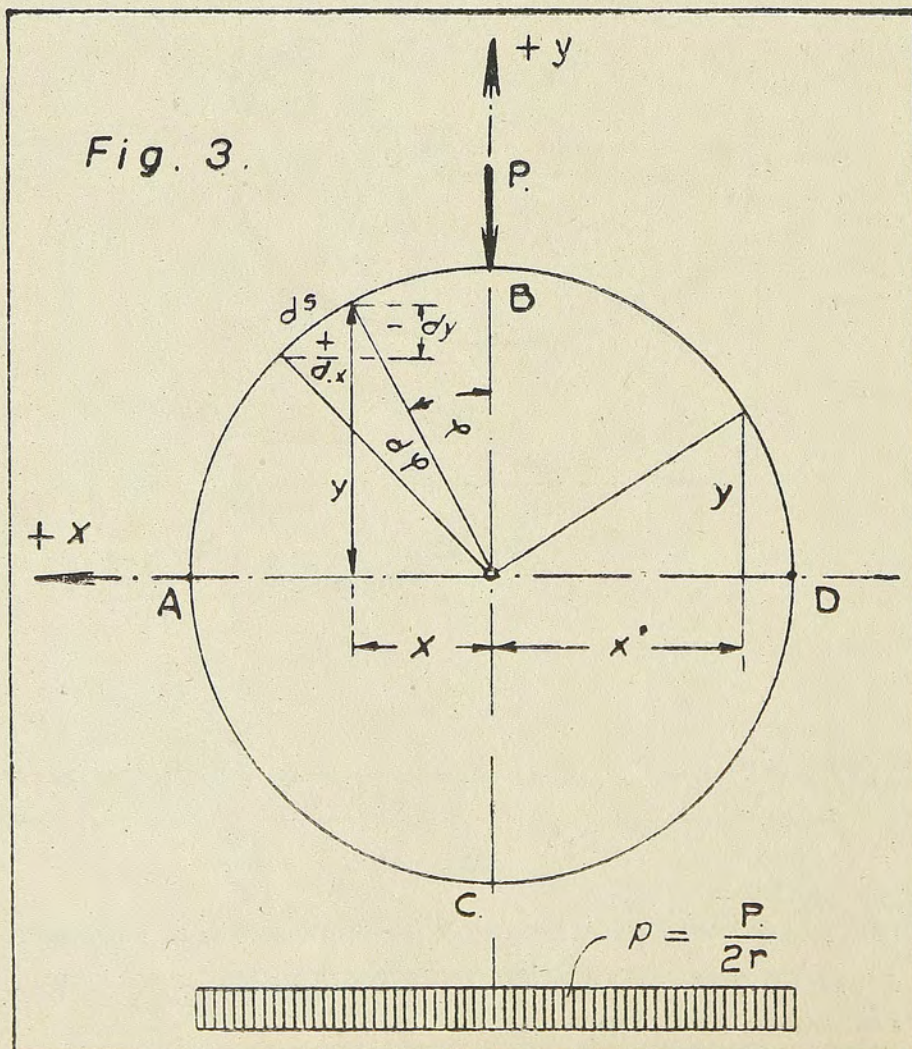
$$N_A = N_C = -\frac{P}{2}$$

$$M_B = M_D = +0,318 Pr$$

$$N_B = N_D = 0.$$



El trabajo presente tiene por objeto llegar a fórmulas de aspecto similar a las citadas, para la estructura de figura 3.



Se acepta que por disponerse un lecho de hormigón árido adecuado, la fundación reacciona verticalmente con la presión uniforme «p» (Hipótesis simplificada de Kammüller, citado por A. Schoklitsch, en «Arquitectura Hidráulica», Tomo II, pág. 320).

En la sección de eje circular, pone R. Saliger que:

$$x = r \operatorname{sen} \varphi, \quad y = r \cos \varphi, \quad ds = r d\varphi$$

$$\int x^2 ds = r^3 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi = \pi r^3 = \int y^2 ds,$$

$$\int ds = 2\pi r$$

$$(III) \quad \begin{cases} \int M y ds = r \int_0^{2\pi} M ds \cos \varphi = r \int_0^{2\pi} M dx = r (F_1 - F_2) \\ \int M x ds = r \int_0^{2\pi} M ds \operatorname{sen} \varphi = r \int_0^{2\pi} M dy = r (F_3 - F_4) \end{cases}$$

y dice además que $\int M ds = F$ es la superficie de momento aplicada al desarrollo de la circunferencia, F_1 es la superficie M de la parte ABC, F_2 la de ADC, F_3 la de BAD y F_4 la de BCD y con ello:

$$X_a = \frac{F_1 - F_2}{\pi r^2}, \quad X_b = \frac{F_3 - F_4}{\pi r^2}, \quad X_c = -\frac{F}{2\pi r}$$

Resulta entonces, necesario calcular las áreas de M sobredichas, operación que se detalla como sigue:

$$F_1 = \int_{-r}^{+r} M dx = \int_{-r}^0 M dx + \int_0^{+r} M dx$$

pero como entre A y B: $M = 0$ y entre B y C $M = -Px' = Px$

$$F_1 = \int_{-r}^0 Px dx = -\frac{P}{2} r^2$$

$$F_2 = \int_{-r}^{+r} M dx$$

Si $90^\circ < \varphi < 180^\circ$,

$$M = -\frac{p(r-x)^2}{2} = -\frac{P}{4r}(r-x)^2$$

Y cuando $180^\circ < \varphi < 270^\circ$

$$M = -P (r + x') \frac{r + x'}{2}$$

pero, por ser: $x = -x'$, también

$$M = -\frac{P}{4r} (r - x)^2$$

Por lo tanto:

$$F_2 = -\frac{P}{4r} \int_{-r}^{+r} (r - x)^2 dx$$

$$F_2 = -\frac{2}{3} P r^2$$

$$F_3 = \int_{-r}^{+r} M dy = \int_{-r}^0 M dy + \int_0^r M dy$$

en la que

$$\int_0^r M dy = 0$$

y como tratándose de $0 > y > -r$,

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$dy = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$F_3 = -\frac{P}{4r} \int_0^r (r - x)^2 \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$F_3 = -\frac{P r^2}{4} \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

Análogamente:

$$F_4 = \int_{-r}^{+r} M dy = \int_{-r}^0 M dy + \int_0^r M dy$$

que, puesto que entre B y C

$$M = -Px' = Px$$

$$dy = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

se transforma en:

$$F_4 = -\frac{P}{4r} \int_0^{-r} (r-x)^2 \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx - P \int_{-r}^0 \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

que vale:

$$F_4 = -\frac{Pr^2}{4} \left(\frac{5}{3} + \frac{3\pi}{2} \right)$$

Finalmente:

$$F = \int_0^{2\pi} M ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M ds + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} M ds + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} M ds$$

en que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M ds = 0$$

además, como siempre que $90^\circ < \varphi < 270^\circ$:

$$M = -\frac{P}{4r} (r-x)^2 = -\frac{Pr}{4} (1 - \operatorname{sen} \varphi)^2$$

y que si $270^\circ < \varphi < 360^\circ$:

$$M = Px = Pr \operatorname{sen} \varphi$$

es claro que:

$$F = -\frac{P r^2}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - \operatorname{sen} \varphi)^2 d\varphi + P r^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi$$

que vale:

$$F = -\frac{3\pi}{8} P r^2 - P r^2 = -P r^2 \frac{3\pi + 8}{8}$$

Reemplazando los valores de F_1 , F_2 , F_3 , F_4 y F hallados más arriba, en las expresiones (III) y notando que $x = r \operatorname{sen} \varphi$ y que $y = r \cos \varphi$, se tiene finalmente que:

$$M = M - \frac{P r}{6\pi} \cos \varphi - \frac{P r}{2} \operatorname{sen} \varphi + 0,346 P r$$

$$N = N - \frac{P}{6\pi} \cos \varphi - \frac{P}{2} \operatorname{sen} \varphi$$

y como, por último:

a) Entre B y A

$$M = 0, \quad N = 0$$

b) Entre A y C

$$M = -\frac{P}{4r} (r - x)^2 = -\frac{P r}{4} (1 - \operatorname{sen} \varphi)^2$$

$$N = P \frac{(1 - \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \varphi}{2}$$

c) Entre C y B

$$M = P x = P r \operatorname{sen} \varphi$$

$$N = P \operatorname{sen} \varphi$$

se encuentra en definitiva que:

a) De B a A

$$M = -Pr \left(\frac{\cos \varphi}{6\pi} + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} - 0,346 \right) = \zeta_1 Pr$$

$$N = -P \left(\frac{\cos \varphi}{6\pi} + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} \right) = \eta_1 P$$

b) De A a C

$$M = -Pr \left[\frac{(1 - \operatorname{sen} \varphi)^2}{4} + \frac{\cos \varphi}{6\pi} + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} - 0,346 \right] = \zeta_2 Pr$$

$$N = -P \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{2} + \frac{\cos \varphi}{6\pi} \right) = \eta_2 P$$

c) De C a B

$$M = -Pr \left(-\frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} + \frac{\cos \varphi}{6\pi} - 0,346 \right) = \zeta_3 Pr$$

$$N = P \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} - \frac{\cos \varphi}{6\pi} \right) = \eta_3 P$$

Los Gráficos N.º 1 y N.º 2, que permiten sentir bien las variaciones de los coeficientes ζ y η , se han construido haciendo variar a φ de 15 en 15 grados.

Debo agradecer, por último, la colaboración prestada al suscrito por el Ingeniero señor H. Bertling.

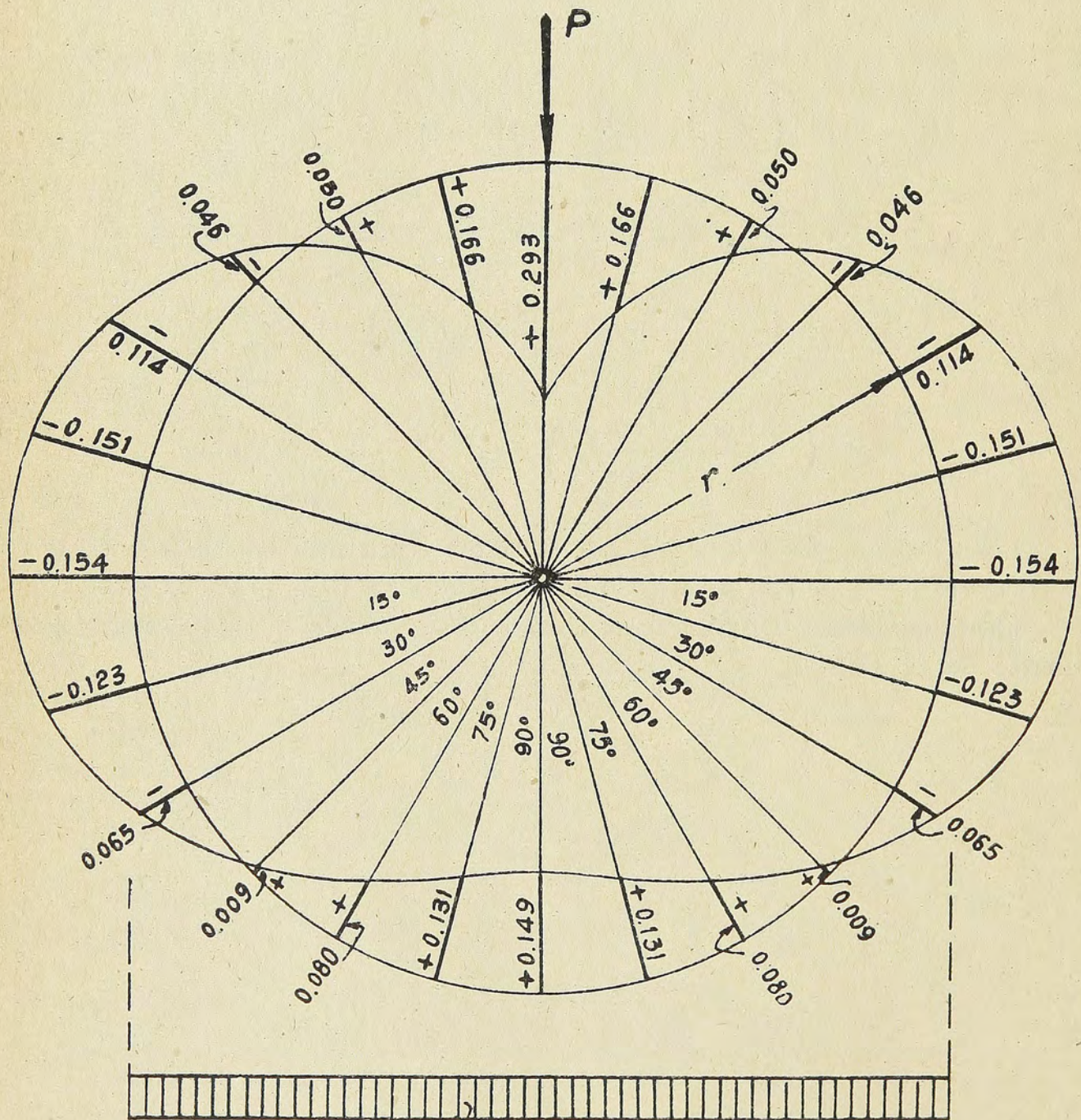
GRAFICO No.1

Estructura anular
con carga concentrada

Escala para $\frac{3}{3}$

$$M = \frac{3}{3} Pr.$$

$$1 \text{ mm} = 0,01$$



$$p = \frac{P}{2r}$$

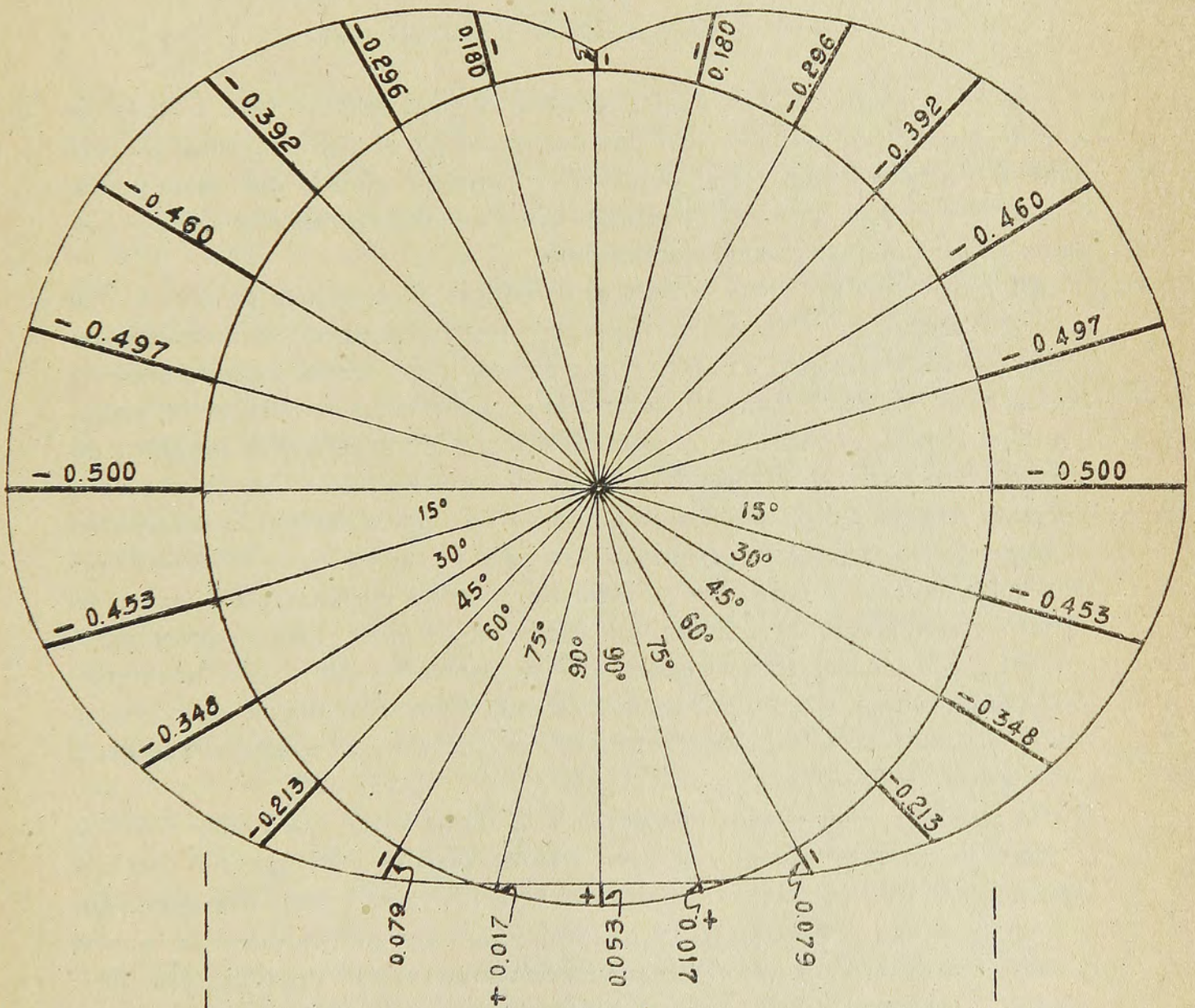
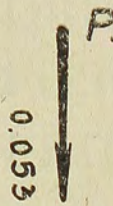
GRAFICO No. 2

Estructura anular
con carga concentrada.

Escala para σ .

1 mm = 0,02

$$N = \eta P$$



$$P = \frac{P}{2r}$$

