Ing. Marcos Pedrero S.

Termodinámica y Radiación

NOTAS

NOTA I. Consideraremos el problema de los dos cuerpos. Elijamos uno de ellos (el Sol) como origen de coordenadas; sea P la posición del otro (un planeta), r la distancia al centro y θ el ángulo con una dirección fija O x situada en el plano del movimiento. La teoría de la Relatividad llega después de largos cálculos con los símbolos de Cristophe en dicho problema a las dos relaciones siguientes:

$$\text{I)} \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{GM}{a} + \frac{2GM}{r} + \frac{2GM\beta^2}{c^2 r^3}$$

$$\text{II)} \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = \beta$$

siendo M la masa del centro que atrae (el Sol), G la constante de atracción universal, c la velocidad de la luz, β una constante según la Relatividad.

Pero todo alumno que estudia Mecánica sabe que la constante β es la célebre constante de las áreas que nos dice que el radio polar describe áreas iguales en tiempos iguales; para que esto se realice es necesario que el vector aceleración esté dirigido hacia el centro (el Sol) y se dice entonces que la aceleración es central (consultar Anales del Instituto de Ingenieros de mayo de 1928).

Si se suprime el último término del segundo miembro de ecuación I se llega entonces a las dos ecuaciones muy conocidas del movimiento planetario (Ley de Newton) y la constante a es estonces el semi-eje mayor de la órbita.

El primer miembro de ecuación I es la expresión general del cuadrado de la velocidad en un movimiento plano cualquiera

$$\text{III)} \quad v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r\,d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

Todo móvil sometido a una fuerza central que sea una función cualquiera de r verifica la relación general muy conocida

$$\text{IV)} \quad v^2 = -\int 2\,\gamma\, d\,r$$

siendo γ la aceleración.

Derivando la ecuación I respecto a la variable r y considerando III se obtiene

$$\frac{d\,v^2}{d\,r} = -\frac{2\,G\,M}{r^2} - \frac{6\,G\,M\,\beta^2}{c^2\,r^4}$$

Derivando IV obtenemos

$$\frac{d\,v^2}{d\,r} = -2\,\gamma$$

Identificando las dos últimas relaciones se deduce

$$\gamma = \frac{G\,M}{r^2} + \frac{3\,G\,M\,\beta^2}{c^2\,r^4}$$

Esto significa que la Relatividad agrega a la aceleración newtoniana el término suplementario

$$\frac{3\,G\,M\,\beta^2}{c^2\,r^4}$$

que varía en razón inversa de la cuarta potencia de la distancia.

Estas observaciones estarían bien en un tratado de Relatividad y cualquier tratado de Mecánica Racional, pero en los que yo he leído no aparecen.

De ecuaciones I y II eliminando dt se obtiene

$$\frac{\beta^2}{r^4}\left(\frac{d\,r}{d\,\theta}\right)^2 + \frac{\beta^2}{r^2} = -\frac{G\,M}{a} + \frac{2\,G\,M}{r} + \frac{2\,G\,M\,\beta^2}{c^2\,r^3}$$

La integración de esta ecuación en la cual r y θ son las únicas variables da entonces la fórmula muy conocida del avance del perihelio de Mercurio en que tanto insiste la Teoría de la Relatividad como una de las verificaciones más importantes de dicha teoría.

Según he observado, esto tendría también importancia en física atómica. En efecto, según experiencias de Bieler, que trabajaba con el conocido físico Chadwick, a la acción entre partículas α y el núcleo de aluminio o magnesio para distancias del orden 5×10^{-13} centímetros se superpone a la fuerza de Coulomb una fuerza suplementaria que variaría en razón inversa de la cuarta o quinta potencia de la distancia. Bieler operaba con partículas α del torio (consultar A. Crowther: "Iones, electrones, radiaciones ionizantes", pág. 263).

Por otra parte debemos recordar que Somerfield para explicar ciertas rayas en los espectros, inexplicables con la teoría de Böhr, y que veinte años de experiencias habían permitido encontrar, introdujo tres fuerzas suplementarias que variaban en razón inversa de la tercera, cuarta y quinta potencia de la distancia (consultar Bruhat: "Cours d'Optique", pág. 385).

En lo expuesto anteriormente se trata de fuerzas o aceleraciones centrales. Y si ahora la realidad fuera más compleja ¿si las fuerzas reales no fueran rigurosamente centrales? H. Poincaré nos decía ya en su obra "Science et Hipothèse", pág. 125, refiriéndose a la hipótesis de las fuerzas centrales: "¿Esta hipótesis es rigurosamente exacta? ¿Es cierto que no estará jamás en contradicción con la experiencia? ¿Quién se atrevería a afirmarlo? Y si nosotros debiéramos abandonar esta hipótesis, todo el edificio tan laboriosamente edificado se trizaría o se derrumbaría". Tal sería el caso en que las partículas materiales encontraran resistencia de un medio como el éter electromagnético por ejemplo, lo que podría acontecer para grandes velocidades.

Creo interesante citar lo que decía el físico francés J. Bertrand en su tratado de Termodinámica, pág. 69: "Si, como es imposible dudar, las moléculas están sumergidas en un medio imponderable, pero muy activo: el éter, ¿es imposible que este medio resista y que la resistencia dependa de la velocidad? ¿Sería posible aplicar el principio de las fuerzas vivas a los planetas si ellos se movieran en un medio resistente?

"Estas hipótesis desaparecerán, continúa Bertrand, si hay acuerdo de los hechos con la teoría que no las toma en cuenta; pero se daría prueba de ignorancia afirmando que ellas no pueden nacer en un espíritu preparado para la Mecánica".

Las fórmulas I y IV no serían entonces válidas y debería utilizarse otras más generales. Nosotros hemos establecido dos fórmulas generales para un movimiento plano cualquiera (consultar Anales del Instituto de Ingenieros, mayo 1928). Ellas son:

$$\mathrm{V)}\quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{\beta^2}{r^2\,\rho\,\mathrm{sen}\,\omega.\ \mathrm{sen}^2\,(\omega - \varphi)} \\[2ex] \dfrac{d\beta}{dt} = -\gamma\, r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

siendo ω el ángulo de la aceleración γ con la tangente a la trayectoria, φ el ángulo de la aceleración con el radio polar, ρ es el radio de curvatura, r el radio polar. Estas fórmulas son válidas cualquiera que sea el origen de coordenadas. Si se elige como origen uno de los cuerpos y se admite que el vector aceleración coincide con el radio polar, tenemos

$$\varphi = o$$

$$\mathrm{sen}\,\varphi = o$$

lo que dá entonces

$$\beta = \mathrm{constante}$$

que significa que el radio polar describe áreas iguales en tiempos iguales; se obtiene entonces:

$$\gamma = \frac{\beta^2}{r^2 \rho \operatorname{sen}^3 \omega}$$

que corresponde al caso particular muy importante de aceleración o fuerza central que varía según una función cualquiera de la distancia al centro.

Se sabe que todas las cónicas verifican la relación

$$\rho \operatorname{sen}^3 \omega = \text{constante}$$

En el caso particular de una elipse se obtienen las relaciones conocidas

$$\rho \operatorname{sen}^3 \omega = \frac{b^2}{a} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{b y a son los semi-ejes}\\ \text{menor y mayor}\end{array}\right]$$

$$\beta = \frac{2 \pi a b}{T}$$

y reemplazando estos valores obtenemos para la aceleración

$$\gamma = \frac{4 \pi^2 a^3}{r^2 T^2} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{a semi-eje mayor, T tiempo}\\ \text{de una revolución completa}\end{array}\right]$$

que nos lleva inmediatamente a la célebre ley de Kepler y que condujo a Newton a introducir la noción de masa que hoy tanto llama la atención de los físicos contemporáneos. Nos parece preferible deducir primero las dos fórmulas generales V de cinemática y después como aplicación deducir las leyes de Kepler y de Newton como lo hemos hecho.

H. Poincaré nos dice en su obra La Valeur de la Science, pág. 181, que el principio de Carnot es el único principo que no se presenta como una consecuencia inmediata de las fuerzas centrales.

H. Lorentz demostró en el Congreso de Bruselas que todos los mecanismos sometidos al principio de Hamilton, son incapaces de explicar la ley de radiación de Planck (consultar Langevin et Broglie: "La théorie de rayonnement et les Quanta", pág. 41).

La crisis de la Mecánica clásica ha sido en buenas cuentas producida por la Termodinámica que exigió la intervención de una nueva constante que desempeña un rol muy importante en las radiaciones: me refiero a la célebre constante h de Planck. Cuando hay frotamientos las ecuaciones de Legrange y de Hamilton dejan de ser válidas rigurosamente.

H. Poincaré nos dice en su obra "Dernières pensées", pág. 171, que se debe buscar una explicación de la ley de radiación de los calores específicos, pero sin hacer tabla rasa de los principios de la Termodinámica y que debe existir un multiplicador sin el cual el principio de Carnot no sería verdadero; que según la teoría de los Quantas ese multiplicador debería variar en forma discontinua. Podríamos entonces pensar en poner un multiplicador a la fór-

mula IV después de multiplicar por la masa del electrón o del átomo. Agregando un nuevo término q obtenemos: $m\,v^2 = -\,m \int 2\,\gamma\,dr + q$
y el multiplicador será:

$$1 - \frac{q}{m \int 2\,\gamma\,dr}$$

La discusión matemática del multiplicador y otras aplicaciones interesantes se darán en otro trabajo. Se puede ensayar con $q = \pm\, n\, h\, \nu$ sen φ, siendo φ ángulo que indicamos con motivo de ecuaciones V.

M. P. S.